ISBN 978-608-4904-04-5(електронско издание)
ISBN 978-608-4904-03-8(печатено издание)
UDC: 373.3.016:51]:159.953.5

РАЗВОЈ НА ЕЛАСТИЧНОСТ НА МИСЛЕЊЕТО КАЈ УЧЕНИЦИТЕ ВО ПОЧЕТНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Методи Главче[1)], Ристо Малчески[2)]

Abstract. Предмет на разработка на овој труд е значењето на наоѓање на повеќе начини за решавање на една иста задача за развојот на еластичноста на мислењето кај учениците во почетното образование. Во трудот е даден краток преглед на квалитетите на мислењето и се разработени три примери погодни за развој на елаатичноста на мислењето.

Клучни зборови. Мислење, квалитети на мислењето, математичка задача

1. Вовед

Наставата по математика претпочита реализирање на повеќе општи и посебни цели, меѓу кои како посебна цел е подобрување на квалитетите на мислењето, како на пример *еластич-носта на мислењето* која се карактеризира со умеењето лесно да се премине од еден кон друг начин на решавање на проблемот, да се наоѓаат нови начини за решавање на проблемите при промена на условите, да се преструктуира системот од сопствени знаења, што ќе овозможи усвојување нови знаења. Покрај еластичноста, од посебна важност е кај учениците да се разви-ва *длабочината на мислењето* која се карактеризира со умеењето да се проникнува во суштината на изучуваните факти, да се согледа нивната врска со други факти, да се моделираат различни ситуации, да се согледа како тие модели можат да се применат во практиката итн.

Претходно споменатите квалитети на мислењето не е можно да се унапредуваат без разви-вање на *целесообразноста на мислењето*, која претставува стремеж да се оствари разумен избор на методи и средства за решавање на некој проблем, при што постојано се ориентираме кон целта поставена во проблемот и кон наоѓањето најкратки патишта за остварување на таа цел. Докажувањето теореми и воопшто решавањето задачи во наставата е незаменливо средство за развивање на умеењето за избор на средства (дефиниции, аксиоми, теореми) за постигнување на дадена цел. Понатаму, целесообразноста на мислењето овозможува појавување на уште едно негово

својство, а тоа е *рационалноста*. Ова својство се карактеризира со економичност во однос на времето и на средствата за решавање на даден проблем. Рационалноста на мислењето е тесно поврзана со *шаблонизацијата* на истото. Имено, за да се постигне рационалност во мислењето се користат алгоритми и теореми, кои како готови шаблони се применуваат во практиката. Освен тоа, рационалноста се должи на фактот дека алгоритмите и теоремите се однесуваат на цели класи објекти.

Понатаму, решавањето на задачи е најдобар начин за развој на *широчината на мислењето*, која се карактеризира со способноста да се опфатат проблемите во целост, да се прошири примената на добиените резултати итн. Затоа, рационалноста на мислењето е во тесна врска со широчината на мислењето. Сето ова е непосредно поврзано со критичноста на мислењето, која се карактеризира со тоа што различните мислења не се прифаќаат без доволно аргументи, туку тие да подлежат на проценка. Јасно, критичноста на мислењето е еден од квалитетите, кои човештвото го довеле до неопходноста од убедување во точноста на тврдењето и наоѓање објективни критериуми за оценка на нивната вистинитост.

2. Развојот на еластичноста на мислењето во функција на развој на остана-тите квалитети на мислењето кај учениците во почетното образование

Претходно изнесеното непосредно укажува дека квалитетите на мислењето се заемно поврзани, па затоа развивањето на еден квалитете не е можно без притоа да се развиваат и останатите квалитети на мислењето. Меѓутоа, согледувајќи ја суштината на еластичноста, широчината, длабочината, шаблонизацијата, рационалноста, целесообразноста и критичноста на мислењето, лесно може да се заклучи дека кај учениците во почетното образование најлесно можеме да ја развиваме еластичноста на мислењето. Токму затоа во следните разгледувања ќе презентираме три примери за кои ќе бидат дадени повеќе начини за нивно решавање, што како што рековме е основен метод за развивање на еластичноста на мислењето.

Пример 1. Горјан како шифра за заклучување на својот мобилен телефон поставил парен четирицифрен број. За да не го заборави бројот, тој запишал:

- сите цифри се различни, а збирот на сите цифри е 15,
- цифрата на единиците е три пати помала од цифрата на илјадитите,
- цифрата на десетките е помала од цифрата на единиците.

Определи ја шифрата која Горјан ја поставил за отклучување на својот мобилен.

Решение. *Прв начин.* Ако a, b, c, d се последователно различни цифри на илјадитите, стотките, десетките и единиците на бараниот четирицифрен број $\overline{abcd}$, тогаш

$$a+b+c+d=15.$$

Бидејќи бараниот број е парен, цифрата d на единиците може да е 0, 2, 4, 6 или 8. Цифрата не единиците е три пати помала од цифрата на илјадитите, па затоа $a=3d<10$, што значи дека можни се два случаја и тоа:

- ако $d=0$, тогаш $a=3\cdot 0=0$, што не е можно бидејќи цифрите се различни и бројот е четирицифрен,
- ако $d=2$, тогаш $a=3\cdot 2=6$.

Бидејќи $d=2$ и $a=6$, а цифрата на десетките е помала од цифрата на единиците, т.е. $c<d$, заклучуваме дека $c=0$ или $c=1$. Сега имаме два случаја:

- ако $c=0$, тогаш $b=15-6-0-2=7$, па бараниот број е 6702,
- ако $c=1$, тогаш $b=15-6-1-2=6$ и тоа не е можно бидејќи цифрите на бараниот број се различни.

Втор начин. Од вториот услов следува дека цифрите на единиците и илјадитите може да бидат паровите 3 и 9, 2 и 6, 1 и 3, соодветно. Понатаму, бидејќи бараниот број е парен добиваме дека цифрата на единиците е 2, а цифрата на илјадитите е 6. Сега, заради третиот услов цифрата на десетките може да е 0 или 1. Бидејќи цифрите мора да се различни бараните број е некој од броевите:

6102, 6302, 6402, 6502, 6702, 6802, 6902,
6012, 6312, 6412, 6512, 6712, 6812, 6912.

Но, меѓу овие броеви само кај бројот 6702 збирот на цифрите е еднаков на 15, па затоа бараниот број е 6702.

Трет начин. Од вториот услов следува дека цифрите на единиците и илјадитите може да бидат паровите 3 и 9, 2 и 6, 1 и 3, соодветно. Понатаму, бидејќи бараниот број е парен добиваме дека цифрата на единиците е 2, а цифрата на илјадитите е 6. Сега, заради третиот услов цифрата на десетките може да е 0 или 1. Ако цифрата на единиците е 0, тогаш заради условот за збирот на цифрите добиваме дека цифрата на стотките е 7, па едно решение е 6702. Ако цифрата на десетките е 1, тогаш заради условот за збирот на цифрите добиваме дека цифрата на стотките е 6, и се добива бројот 6612, кој не е решение бидејќи има две еднакви цифри. Конечно, шифрата на телефонот на Горјан е 6702.

Пример 2. Тројца пријатели Раде, Ласте и Марко тренираат маратон. Тие имаат зелено, сино и црвено капче, а носат патики број 43, 44 и 45. Чето пати нешто забораваат во соблекувалната, а денес во шкавчето за заборавени

работи имало зелено капче и патики број 43. Кој денеска заборавил работи ако се знае дека:

- Ласте нема сино капче,
- оној што има патики број 44 има зелено капче,
- Раде нема патики број 43,
- Ласте нема патики број 44,
- оној што има патики број 43 нема црвено капче.

Решение. *Прв начин.* Знаеме дека Ласте нема сино капче. Бидејќи Ласте нема ниту патики број 44, заклучуваме дека тој нема зелено капче. Значи, Ласте има црвено капче. Лицето што има црвено капче нема патики број 43, па затоа Ласте нема патики број 43. Но, Ласте нема и патики број 44, па затоа тој има патики број 45. Според тоа, Раде нема патики број 43 и 45, па заклучуваме дека Раде има патики број 44. Но, лицето со патики број 44 има зелено капче, па заклучуваме дека Раде има зелено капче. Конечно, Марко има патики број 43 и сино капче.

Од претходните разгледувања следува дека Раде и Марко заборавиле работи во соблеку-валната.

Втор начин. Со З да го означиме зеленото капче, со Ц црвеното капче и со С синото капче. Понатаму, со 43, 44 и 45 да ги означиме патиките број 43, број 44 и број 45, соодветно. Ќе ја пополниме табелата со знаците $+$ и $-$ на следниов начин: ако лицето поседува некој предмет на соодветноот место во табелата ќе ставиме знак $+$, а ако не го поседува тој предмет ќе ставиме знак $-$. Оваа постапка го прати заклучувањето како и во првиот начин на решавање.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде						–
Ласте		–		–	–	+
Марко						–
З						
С						
Ц						

	43	44	45	З	С	Ц
Раде			–			–
Ласте	–	–	+	–	–	+
Марко			–			–
З			–			
С			–			
Ц	–	–	+			

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–			–
Ласте	–	–	+	–	–	+
Марко	+	–	–			–
З			–			
С			–			
Ц	–	–	+			

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–	+	–	–
Ласте	–	–	+	–	–	+
Марко	+	–	–	–		–
З	–	+	–			
С		–	–			
Ц	–	–	+			

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–	+	–	–
Ласте	–	–	+	–	–	+
Марко	+	–	–	–	+	–
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Бидејќи денес се заборавени зелено капче и патики број 43, заклучуваме дека Раде и Марко заборавиле работи во соблекувалната.

Трет начин. Со З да го означиме зеленото капче, со Ц црвеното капче и со С синото капче. Понатаму, со 43, 44 и 45 да ги означиме патиките број 43, број 44 и број 45, соодветно. Ќе ја пополниме табелата со знаците $+$ и $-$ на следниов начин: ако лицето поседува некој предмет на соодветноот место во табелата ќе ставиме знак $+$, а ако не го поседува тој предмет ќе ставиме знак $-$.

Првата таблица е пополнета според условите кои се дадени во задачата.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–					
Ласте		–			–	
Марко						
З	–	+	–			
С		–				

Ц	–	–	

Од табелата се гледа дека сино капче има лицето кое носи патки број 43 и црвено капќе има лицето кое носи патики број 45. Така ја добиваме следнава табела.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–					
Ласте		–			–	
Марко						
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Сега, сино капче носи лицето кое носи патики број 43, а Раде не носи патики број 43, па затоа Раде нема сино капче. Значи, сино капче има Марко. Зелено капе има лицето кое носи патики број 44. Марко има сино, а не зелено капче, па затоа Марко не носи патики број 44.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–				–	
Ласте		–			–	
Марко		–		–	+	–
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Раде носи патики број 44 и има зелено капче.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	–	+	–	+	–	–
Ласте		–		–	–	
Марко		–		–	+	–
З	–	+	–			
С	+	–	–			
Ц	–	–	+			

Сега уште може да се види дека Ласте има црвено капче и носи патики број 45, Марко носи патики број 43.

	43	44	45	З	С	Ц
Раде	−	+	−	+	−	−
Ласте	−	−	+	−	−	+
Марко	+	−	−	−	+	−
З	−	+	−			
С	+	−	−			
Ц	−	−	+			

Бидејќи денес се заборавени зелено капче и патики број 43, заклучуваме дека Раде и Марко заборавиле работи во соблекувалната.

Четврт начин. Прво ќе ги спариме капчето и патиките на ист сопственик. Познато е дека тој што има патики број 44 има зелено капче. Исто така е познато дека тој што има патики број 43 нема црвено капче. Значи, сопственикот на патиките број 43 нема ниту зелено ниту црвено капче, па затоа тој има сино капче. Конечно, тој што има патики број 45 има црвено капче.

Сега, бидејќи Ласте нема сино капче и нема патики број 44, тој мора да има црвено капче и патики број 45. Раде нема патики број 43, па затоа тој има патики број 44 и зелено капче, а Марко го има преостанатиот пар патики број 43 и сино капче.

Бидејќи денес се заборавени зелено капче и патики број 43, заклучуваме дека Раде и Марко заборавиле работи во соблекувалната.

Пример 3. На шаховски турнир учествувале 10 шахисти. Секој шахист играл со секој од преостанатите шахисти по една партија.

а) Колку партии изиграл секој играч?

б) Колку партии се вкупно одиграни на турнирот?

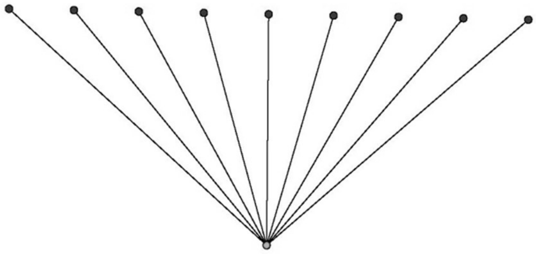
Решение. а) *Прв начин*. Играчите да ги означиме со броевите од 1 до 10. Бидејќи изборот на играчот не влијае на бројот на партиите кои ги игра еден играч, ќе ги испишеме можностите за еден од играчите, на пример за играчот 1. Имаме

1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 1 и 6, 1 и 7, 1 и 8, 1 и 9, 1 и 10.

Бидејќи е сеедно кој од играчите сме го разгледувале, заклучуваме дека секој играч одиграл по 9 партии шах.

Втор начин. Бидејќи секој играч мора да игра со секој од преостанатите играчи, да разгледмае еден играч, на пример првиот. Првиот играч мора да игра со секој од преостанатите $10-1=9$ играчи, т.е. тој игра 9 патии. Бидејќи е сеедно кој од играчите сме го разгледувале, заклучуваме дека секој играч одиграл по 9 партии шах.

Трет начин. Секој од десетте играчи да го означиме со точка и графички, со отсечки, да ги прикажеме сите партии кои тој ги одиграл (цр-теж десно). Вкупниот број партии е еднаков на бројот на отсечките со кои сме поврзале една точка (играч) со преостанатите точки (играчи), што значи дека секој играч одиграл точно 9 партии шах.



б) *Прв начин*. Да ги запишеме сите можни партии кои ќе се изиграат на трнирот, при што ќе внимаваме партиите кои ги играат исти играчи да не ги броеви два пати.

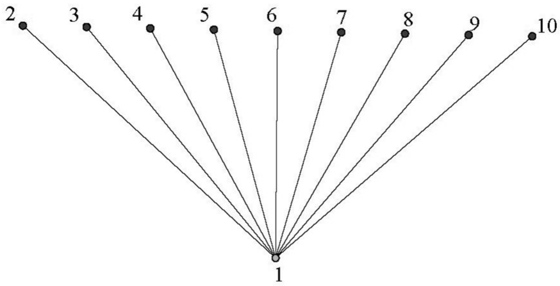
1 и 2	1 и 3	1 и 4	1 и 5	1 и 6	1 и 7	1 и 8	1 и 9	1 и 10	9 партии
2 и 3	2 и 4	2 и 5	2 и 6	2 и 7	2 и 8	2 и 9	2 и 10		8 партии
3 и 4	3 и 5	3 и 6	3 и 7	3 и 8	3 и 9	3 и 10			7 партии
4 и 5	4 и 6	4 и 7	4 и 8	4 и 9	4 и 10				6 партии
5 и 6	5 и 7	5 и 8	5 и 9	5 и 10					5 партии
6 и 7	6 и 8	6 и 9	6 и 10						4 партии
7 и 8	7 и 9	7 и 10							3 партии
8 и 9	8 и 10								2 партии
9 и 10									1 партија

Конечно, ако ги собереме броевите на партиите во последната колона добиваме дека на турнирот се изиграни вкупно $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ партии шах.

Втор начин. Да ги собереме последователно сите партии кои ги изиграле играчите почнувајќи од првиот до последниот играч. Првиот играч изиграл 9 партии. Вториот играч исто така изиграл 9 партии, но веќе ја броевме партијата која ја изиграл со првиот играч, па така добиваме 8 нови партии. Третиот играч изиграл 9 партии, но веќе ги броеви партиите кои ги изиграл со првите двајца играчи, па така добиваме 7 нови партии. Понатаму, заклучуваме дека четвртиот играч изиграл 6 нови партии, петтииот играч изиграл 5 нови партии, шестиот изиграл 6 нови партии, седмиот 3 нови партии, осмиот 2 нови партии и деветтиот 1 нова партија и тоа таа со десеттиот играч. За десеттиот

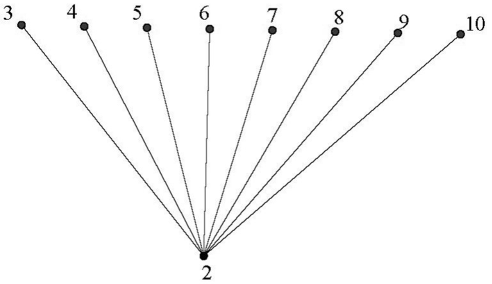
играч се броени сите партии кои ги изиграл. Значи, вкупно се изиграни $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ партии шах.

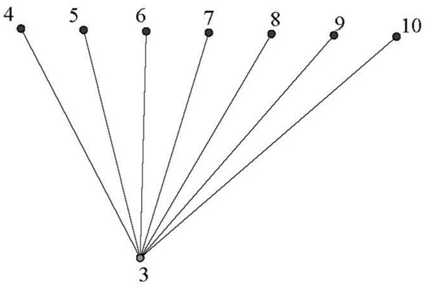
Трет начин. Да ги прикажеме графички сите партии кои ги изиграле играчите. За попрегледно нека секој играч го означиме со една точка , а точките ги означиме со броевите од 1 до 10. Тогаш бројот на партиите е еднаков на бројот на нацртаните отсечки чии крајни точки се точките со кои се означени играчите.



Првиот играч изиграл 9 партии кои се прикажани на цртежот десно.

Вториот играч изиграл 9 партии, но таа со првиот играч веќе е прикажана, па затоа имаме 8 нови партии (цртеж долу лево). Третиот играч изиграл 9 партии, но оние со првиот и вториот играч се веќе прикажани, па затоа имаме 7 нови партии (цртеж долу десно).



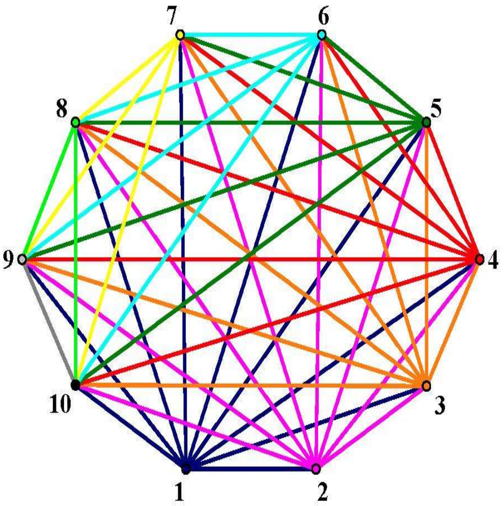


Со аналогни постапки добиваме дека за чет-вртиот играч треба да додадеме 6 нови партии, за петтиот играч 5 нови партии, за шестиот играч 4 нови партии, за седмиот играш 3 нови партии, за осмиот 2 нови партии и за деветтиот 1 нова партија. Конечно, вкупно се изиграни

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$$

партии шах.

Четврт начин. Ако играчите ги претставиме со точки распоредени на кружница, тогаш бројот на партиите шах кои се изиграни на турнирот можеме да го добиеме со пребројување на отсеч-ките прикажани на цртежот десно.



3. Заклучок

Развивањето на квалитетите на мислењето е важна задача на наставата по математика. Притоа, заради недостатокот на теориските знаења и воопшто малиот број предзнаења се добива впечаток дека кај учениците од почетното образование скоро и да е невозможно да се развиваат определени квалитети на мислењето, како што се длабочината, целесообразноста и рационалноста на мислењето. Меѓутоа ако се земе предвид дека основната алатка за равивање на еластичноста на мислењето е наоѓањето на повеќе начини за решавање на една иста задача, претходно разгледаните и многу други примери укажуваат дека не постојат никакви пречки за развој на еластичноста на мислењето кај учениците од почетното образование. Понатаму, ако се земе предвид дека при развивањето на еден од квалитетите на мислењето ние во определена мерка ги развиваме и преостанатите квалитети на мислењето, можеме слободно да кажеме дека со развивање на еластичноста на мислењето ние всушност ги развиваме сите квалитети на мислењето. Ова посебно се однесува на целесообразноста и рационалноста на мислењето, бидејќи наоѓањето на повеќе начини за решавање на една иста задача овозможува стекнување умеења за разумен избор на методи и средства за решавање на слични задачи и наоѓање на најкратки патишта за остварување на поставената цел, што е тесно поврзано со економичноста во однос на времето и средствата за решавање на даден проблем.

References

[1] Ганчев, И.: Аналитико-синтетичният метод на мислене в УКМ, Обучението по математика, 2/1986
[2] Гнеденко, Б. В.: Върху развитието на мисленето и речта в уроците по математика, Математика в школе, 3/1976, Москва
[3] Малчески, Р. (2019). Методика на наставата по математика (трето издание), Армаганка, Скопје
[4] Малчески, Р., Главче, М., Аневска, К. (2022). Математички надарените ученици во почетното образование, Педагошки факултет, Скопје

1) Педагошки факултет, Унив. Св. Кирил и Методиј, Скопје
mglavche@gmail.com
2) Професор во пензија, Скопје, Македонија
risto.malceski@gmail.com
Corresponding author: mglavche@gmail.com